Zamiana zmiennych w całkach wielokrotnych

Anna Bahyrycz

Twierdzenie 1 (o zamianie zmiennych w całce podwójnej)

Niech Δ i D będą obszarami regularnymi na płaszczyźnie oraz funkcja wektorowa T określona wzorem

$$T : \begin{cases} x = \phi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

przekształca obszar Δ na D. Jeżeli:

1. *funkcje ϕ i ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na zbiorze otwartym zawierającym Δ,*
2. *funkcja f jest ciągła na obszarze D,*
3. *odwzorowanie T wnętrza obszaru Δ w obszar D jest przekształceniem różnowartościowym,*
4. *wewnątrz obszaru Δ jakobian przekształcenia T jest różny od zera*

to

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f\big(\phi(u,v),\psi(u,v)\big)\left|J_T(u,v)\right|\,dudv.$$

Współrzędne biegunowe

współrzędne kartezjańskie
$P = P(x, y)$
(∼ postać algebraiczna
liczby zespolonej)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

współrzędne biegunowe
$P = P(\rho, \varphi)$
(∼ postać trygonometryczna
liczby zespolonej)

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \ \text{(albo } \varphi \in [-\pi, \pi)) \end{cases}$$

Współrzędne biegunowe

współrzędne kartezjańskie

$P = P(x,y)$

(~ postać algebraiczna liczby zespolonej)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

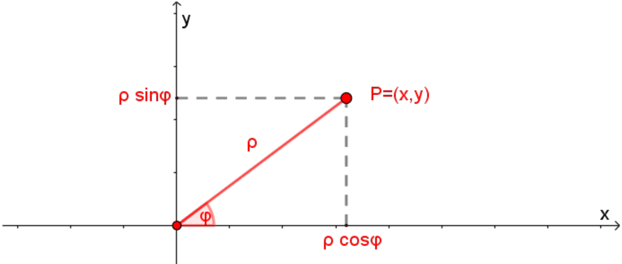
$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

współrzędne biegunowe

$P = P(\rho,\varphi)$

(~ postać trygonometryczna liczby zespolonej)

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \ \ (\text{albo} \ \ \varphi \in [-\pi,\pi)) \end{cases}$$



Zamiana współrzędnych biegunowych na kartezjańskie

Współrzędne biegunowe

współrzędne kartezjańskie
$P = P(x, y)$
(~ postać algebraiczna
liczby zespolonej)

współrzędne biegunowe
$P = P(\rho, \varphi)$
(~ postać trygonometryczna
liczby zespolonej)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \ \ (\text{albo} \ \ \varphi \in [-\pi, \pi)) \end{cases}$$

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze D, któremu odpowiada we współrzędnych biegunowych obszar regularny Δ, to

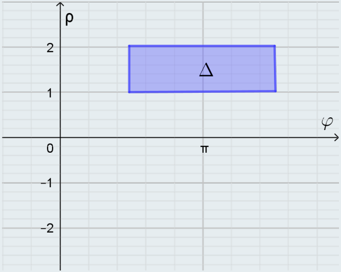
$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_\Delta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\rho\,d\rho d\varphi.$$

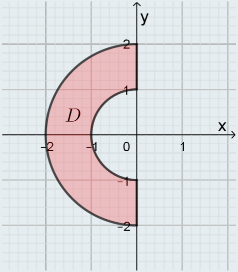
Przykład 1

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *po obszarze regularnym* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ x \leq 0\}$.

Przykład 1

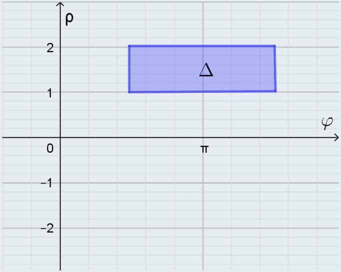
Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *po obszarze regularnym* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4 \ \wedge \ x \le 0\}$.

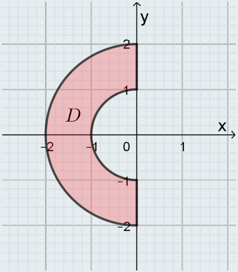




Przykład 1

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *po obszarze regularnym* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4 \ \wedge \ x \le 0\}$.

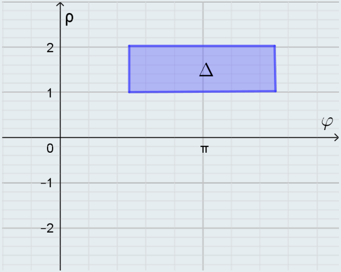


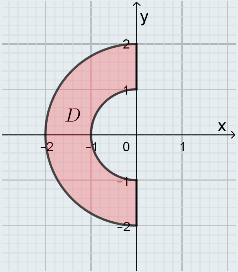


$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \iint_\Delta \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} \cdot \rho \, d\rho d\varphi$$

Przykład 1

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ *po obszarze regularnym* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4 \ \wedge \ x\le 0\}$.



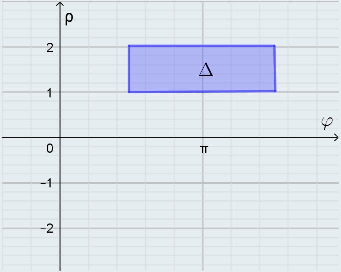


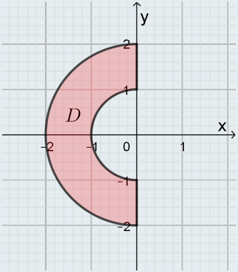
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_\Delta \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\cdot\rho\,d\rho d\varphi$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\Big(\int_1^2 \rho\cdot\rho\,d\rho\Big)d\varphi$$

Przykład 1

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *po obszarze regularnym* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4 \ \wedge \ x \le 0\}$.





$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \iint_\Delta \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} \cdot \rho \, d\rho d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \Big(\int_1^2 \rho \cdot \rho \, d\rho \Big) d\varphi = \Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\varphi \Big) \cdot \Big(\int_1^2 \rho^2 \, d\rho \Big) = \pi \cdot \Big[\frac{1}{3}\rho^3 \Big]_1^2 = \frac{7}{3}\pi$$

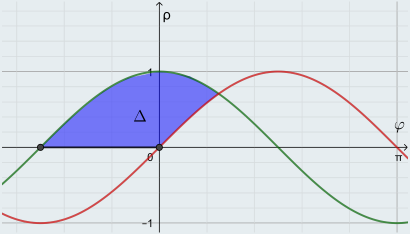
Przykład 2

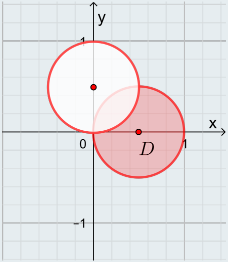
Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y)=y$ *po obszarze regularnym* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leq x^2+y^2\leq x\}$.

Przykład 2

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = y$ *po obszarze regularnym* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x^2 + y^2 \le x\}$.

$$(x^2 + y^2 - y \ge 0 \wedge x^2 + y^2 - x \le 0) \Leftrightarrow \left(x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{4} \wedge \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}\right)$$

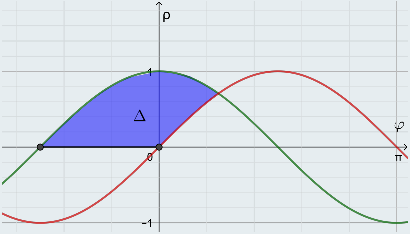


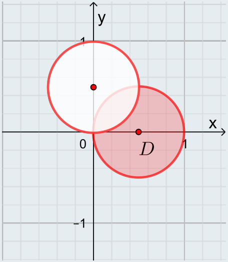


Przykład 2

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x, y) = y$ *po obszarze regularnym* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 + y^2 \leq x\}$.

$$(x^2 + y^2 - y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - x \leq 0) \Leftrightarrow \left(x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \wedge \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right)$$





Δ *jest obszarem regularnym*

Δ_1 :

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq \cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \end{cases}$$

Δ_2 :

$$\begin{cases} \sin\varphi \leq \rho \leq \cos\varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Przykład 2 c.d.

$\Delta_1:$
$$\begin{cases} 0 \le \rho \le \cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0 \end{cases}$$

$\Delta_2:$
$$\begin{cases} \sin\varphi \le \rho \le \cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_\Delta \rho \sin\varphi \cdot \rho\; d\rho d\varphi = \iint_{\Delta_1} \rho^2 \sin\varphi\; d\rho d\varphi + \iint_{\Delta_2} \rho^2 \sin\varphi\; d\rho d\varphi$$

Przykład 2 c.d.

$\Delta_1 :$
$$\begin{cases} 0 \le \rho \le \cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0 \end{cases}$$

$\Delta_2 :$
$$\begin{cases} \sin\varphi \le \rho \le \cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_\Delta \rho\sin\varphi\cdot\rho\,d\rho d\varphi = \iint_{\Delta_1} \rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi + \iint_{\Delta_2} \rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\int_0^{\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\sin\varphi}^{\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi$$

Przykład 2 c.d.

$\Delta_1:$

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le \cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0 \end{cases}$$

$\Delta_2:$

$$\begin{cases} \sin\varphi \le \rho \le \cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_\Delta \rho\sin\varphi\cdot\rho\,d\rho d\varphi = \iint_{\Delta_1} \rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi + \iint_{\Delta_2} \rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \Big(\int_0^{\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\Big)d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_{\sin\varphi}^{\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\Big)d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{3}\sin\varphi\Big[\rho^3\Big]_0^{\cos\varphi}\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\sin\varphi\Big[\rho^3\Big]_{\sin\varphi}^{\cos\varphi}\,d\varphi$$

Przykład 2 c.d.

Δ_1 :

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le \cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0 \end{cases}$$

Δ_2 :

$$\begin{cases} \sin\varphi \le \rho \le \cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_\Delta \rho\sin\varphi\cdot\rho\,d\rho d\varphi = \iint_{\Delta_1} \rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi + \iint_{\Delta_2} \rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\Big(\int_0^{\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\Big)d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_{\sin\varphi}^{\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\Big)d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{3}\sin\varphi\Big[\rho^3\Big]_0^{\cos\varphi} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\sin\varphi\Big[\rho^3\Big]_{\sin\varphi}^{\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi)\,d\varphi$$

Przykład 2 c.d.

Δ_1 :
$$\begin{cases} 0 \le \rho \le \cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0 \end{cases}$$

Δ_2 :
$$\begin{cases} \sin\varphi \le \rho \le \cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\iint_D y\, dxdy = \iint_\Delta \rho \sin\varphi \cdot \rho\, d\rho d\varphi = \iint_{\Delta_1} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\varphi + \iint_{\Delta_2} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \Big(\int_0^{\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho \Big) d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_{\sin\varphi}^{\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho \Big) d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{3} \sin\varphi \Big[\rho^3\Big]_0^{\cos\varphi} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} \sin\varphi \Big[\rho^3\Big]_{\sin\varphi}^{\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi (\cos^3\varphi - \sin^3\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\varphi\, d\varphi$$

Współrzędne walcowe

współrzędne kartezjańskie

$$P = P(x, y, z)$$

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= h \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

współrzędne walcowe

$$P = P(\rho, \varphi, h)$$

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \ \ (\text{albo} \ \ \varphi \in [-\pi, \pi)) \\ h \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Współrzędne walcowe

współrzędne kartezjańskie

$$P = P(x, y, z)$$

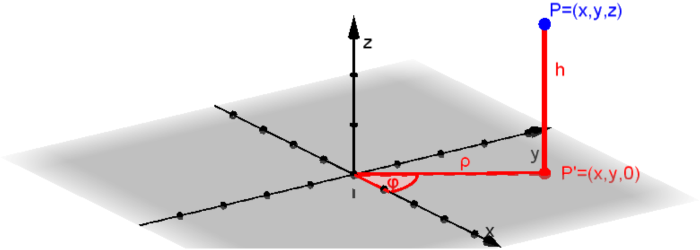
$$\begin{cases} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= h \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

współrzędne walcowe

$$P = P(\rho, \varphi, h)$$

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \ \ \text{(albo } \ \varphi \in [-\pi, \pi)) \\ h \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Współrzędne walcowe

współrzędne kartezjańskie

$$P = P(x, y, z)$$

$$\begin{cases} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= h \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

współrzędne walcowe

$$P = P(\rho, \varphi, h)$$

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \ \text{(albo } \varphi \in [-\pi, \pi)) \\ h \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Twierdzenie 3

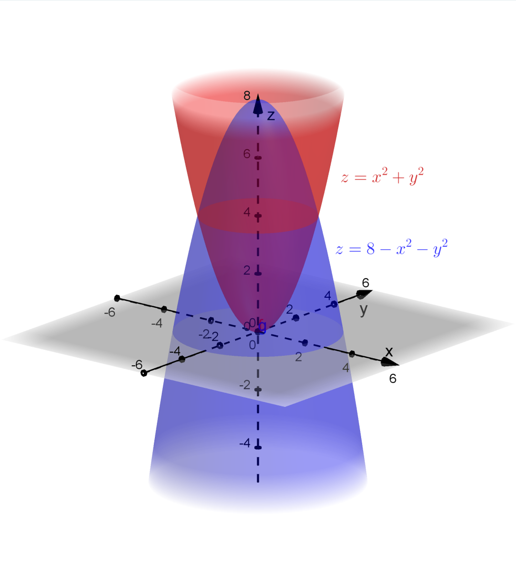
Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze U, któremu odpowiada we współrzędnych walcowych obszar regularny Ω, to

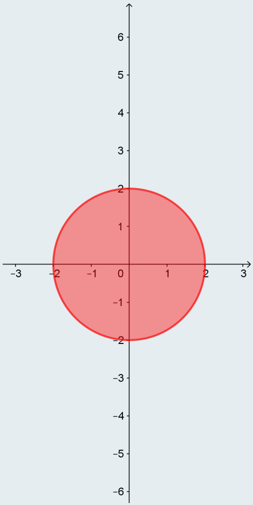
$$\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_\Omega f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, h) \cdot \rho \, d\rho d\varphi dh.$$

Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całkę potrójną $\iiint_U x^2 + y^2 \, dxdydz$ *gdzie* U *jest ograniczony powierzchniami* $z = x^2 + y^2 \ \wedge \ z = 8 - x^2 - y^2$.

Przykład 3

Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całkę potrójną $\iiint_U x^2 + y^2 \, dxdydz$ *gdzie* U *jest ograniczony powierzchniami* $z = x^2 + y^2 \wedge z = 8 - x^2 - y^2$.





Przykład 3 c.d.

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$

Przykład 3 c.d.

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ 0 \le & \rho & \le 2 \\ \rho^2 \le & h & \le 8 - \rho^2 \end{cases}$$

Przykład 3 c.d.

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ 0 \le & \rho & \le 2 \\ \rho^2 \le & h & \le 8 - \rho^2 \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2 + y^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega \rho^2 \cdot \rho \, d\rho d\varphi dh = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 \left[\int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \rho^3 \, dh \right] d\rho \right\} d\varphi$$

Przykład 3 c.d.

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ 0 \le & \rho & \le 2 \\ \rho^2 \le & h & \le 8 - \rho^2 \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2 + y^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega \rho^2 \cdot \rho \, d\rho d\varphi dh = \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^2 \Big[\int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \rho^3 \, dh \Big] d\rho \Big\} d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^2 \rho^3 \Big[h \Big]_{\rho^2}^{8-\rho^2} \, d\rho \Big\} d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^2 \rho^3 (8 - 2\rho^2) \, d\rho \Big\} d\varphi$$

Przykład 3 c.d.

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq & \varphi & < 2\pi \\ 0 \leq & \rho & \leq 2 \\ \rho^2 \leq & h & \leq 8 - \rho^2 \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2 + y^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega \rho^2 \cdot \rho \, d\rho d\varphi dh = \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^2 \Big[\int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \rho^3 \, dh \Big] \, d\rho \Big\} d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^2 \rho^3 \Big[h \Big]_{\rho^2}^{8-\rho^2} \, d\rho \Big\} d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^2 \rho^3 (8 - 2\rho^2) \, d\rho \Big\} d\varphi$$

$$\Big(\int_0^{2\pi} d\varphi \Big) \cdot \Big(\int_0^2 8\rho^3 - 2\rho^5 \, d\rho \Big) = 2\pi \cdot \Big[2\rho^4 - \frac{1}{3}\rho^6 \Big]_0^2 = \frac{32}{3}\pi$$

Współrzędne sferyczne

współrzędne kartezjańskie

$$P = P(x, y, z)$$

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\psi \\ y &= r\sin\varphi\cos\psi \\ z &= r\sin\psi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

współrzędne sferyczne

$$P = P(r, \varphi, \psi)$$

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \ \ \text{(albo } \ \varphi \in [-\pi, \pi)) \\ \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Współrzędne sferyczne

współrzędne kartezjańskie

$$P = P(x, y, z)$$

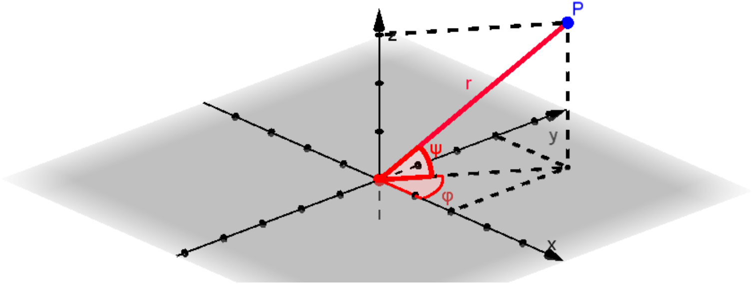
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

współrzędne sferyczne

$$P = P(r, \varphi, \psi)$$

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \ \text{(albo } \varphi \in [-\pi, \pi)) \\ \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



Współrzędne sferyczne

współrzędne kartezjańskie

$$P = P(x, y, z)$$

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\psi \\ y &= r\sin\varphi\cos\psi \\ z &= r\sin\psi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

współrzędne sferyczne

$$P = P(r, \varphi, \psi)$$

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \text{ (albo } \varphi \in [-\pi, \pi)) \\ \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Twierdzenie 4

Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze U, któremu odpowiada we współrzędnych sferycznych obszar regularny Ω, to

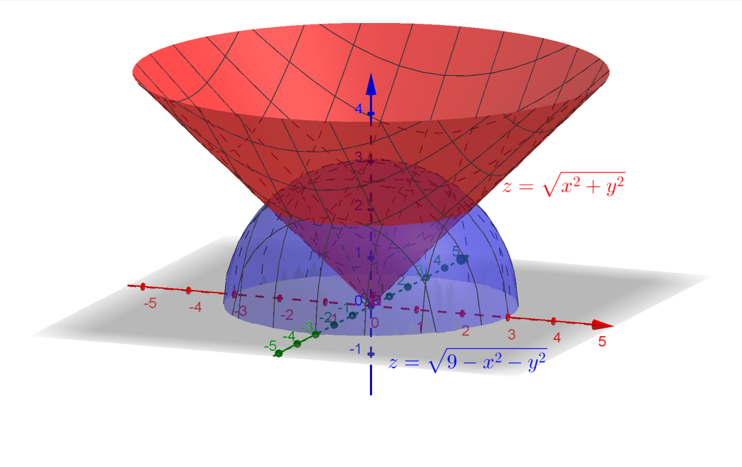
$$\iiint_U f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Omega f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)r^2\cos\psi\, drd\varphi d\psi.$$

Przykład 4

Wprowadzając współrzędne sferyczne lub walcowe obliczyć całkę potrójną $\iiint_U x^2 + y^2 \, dxdydz$, *gdzie* U *jest ograniczony powierzchniami* $z = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Przykład 4

Wprowadzając współrzędne sferyczne lub walcowe obliczyć całkę potrójną $\iiint_U x^2+y^2\,dxdydz$ *, gdzie* U *jest ograniczony powierzchniami* $z=\sqrt{x^2+y^2} \wedge z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.



Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne sferyczne)

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne sferyczne)

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & r & \le 3 \\ 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \le & \psi & \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne sferyczne)

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 3 \\ 0 \leq & \varphi & < 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \leq & \psi & \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2 + y^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega r^2 \cos^2\psi \cdot r^2 \cos\psi \, drd\varphi d\psi$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne sferyczne)

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & r & \le 3 \\ 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \le & \psi & \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2+y^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega r^2\cos^2\psi \cdot r^2\cos\psi \, drd\varphi d\psi$$

$$= \int_0^3 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos^3\psi \, d\psi \Big] d\varphi \Big\} dr$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne sferyczne)

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & r & \le 3 \\ 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \le & \psi & \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2+y^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega r^2 \cos^2\psi \cdot r^2 \cos\psi \, drd\varphi d\psi$$

$$= \int_0^3 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos^3\psi \, d\psi \Big] d\varphi \Big\} dr$$

$$= \Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi \, d\psi \Big) \cdot \Big(\int_0^{2\pi} d\varphi \Big) \cdot \Big(\int_0^3 r^4 dr \Big)$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne sferyczne)

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & r & \le 3 \\ 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \le & \psi & \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2+y^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega r^2\cos^2\psi \cdot r^2\cos\psi \, drd\varphi d\psi$$

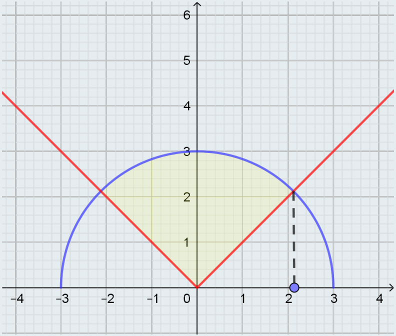
$$= \int_0^3 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos^3\psi \, d\psi \Big] d\varphi \Big\} dr$$

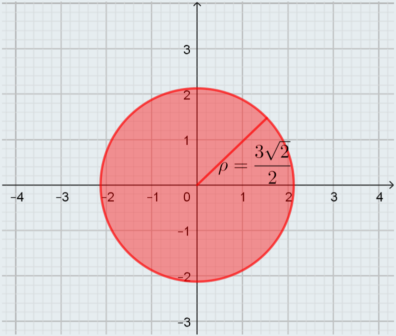
$$= \Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi \, d\psi \Big) \cdot \Big(\int_0^{2\pi} d\varphi \Big) \cdot \Big(\int_0^3 r^4 dr \Big)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{3^5}{5} \Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\psi - \cos\psi\sin^2\psi) \, d\psi \Big)$$

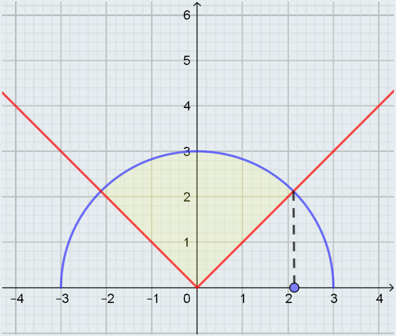
$$= 2\pi \cdot \frac{3^5}{5} \Big[\sin\psi - \frac{\sin^3\psi}{3} \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot \frac{3^5}{5} \cdot \Big(1 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}\Big) = \frac{81}{10}\pi(8 - 5\sqrt{2})$$

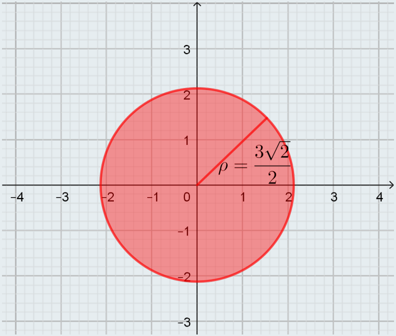
Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne walcowe)





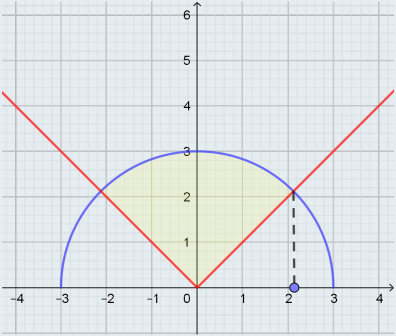
Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne walcowe)

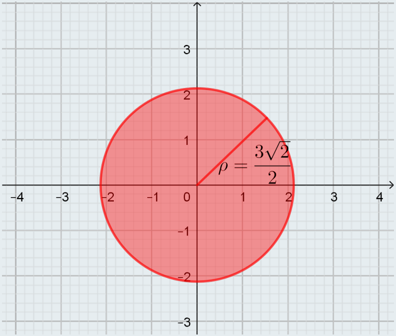




$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne walcowe)





$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq & \varphi & < 2\pi \\ 0 \leq & \rho & \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \rho \leq & h & \leq \sqrt{9 - \rho^2} \end{cases}$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne walcowe)

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ 0 \le & \rho & \le \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \rho \le & h & \le \sqrt{9-\rho^2} \end{cases}$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne walcowe)

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ 0 \le & \rho & \le \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \rho \le & h & \le \sqrt{9-\rho^2} \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2 + y^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega \rho^2 \cdot \rho \, d\rho d\varphi dh = \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \Big[\int_\rho^{\sqrt{9-\rho^2}} \rho^3 \, dh \Big] d\rho \Big\} d\varphi$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne walcowe)

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega:\begin{cases}0\le & \varphi & <2\pi\\ 0\le & \rho & \le\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ \rho\le & h & \le\sqrt{9-\rho^2}\end{cases}$$

$$\iiint_U x^2+y^2\,dxdydz=\iiint_\Omega \rho^2\cdot\rho\,d\rho d\varphi dh=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left[\int_\rho^{\sqrt{9-\rho^2}}\rho^3\,dh\right]d\rho\right\}d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\rho^3\left[h\right]_\rho^{\sqrt{9-\rho^2}}\,d\rho\right\}d\varphi=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\rho^3(\sqrt{9-\rho^2}-\rho)\,d\rho\right\}d\varphi$$

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega:\begin{cases} 0\le & \varphi & <2\pi\\ 0\le & \rho & \le\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ \rho\le & h & \le\sqrt{9-\rho^2}\end{cases}$$

$$\iiint_U x^2+y^2\,dxdydz=\iiint_\Omega \rho^2\cdot\rho\,d\rho d\varphi dh=\int_0^{2\pi}\Big\{\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\Big[\int_\rho^{\sqrt{9-\rho^2}}\rho^3\,dh\Big]\,d\rho\Big\}d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big\{\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\rho^3\big[h\big]_\rho^{\sqrt{9-\rho^2}}\,d\rho\Big\}d\varphi=\int_0^{2\pi}\Big\{\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\rho^3(\sqrt{9-\rho^2}-\rho)\,d\rho\Big\}d\varphi$$

$$=\Big(\int_0^{2\pi}d\varphi\Big)\cdot\Big(\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\rho^3\sqrt{9-\rho^2}-\rho^4)\,d\rho\Big)=\frac{81}{10}\pi(8-5\sqrt{2})$$

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ 0 \le & \rho & \le \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \rho \le & h & \le \sqrt{9-\rho^2} \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2+y^2\, dxdydz = \iiint_\Omega \rho^2 \cdot \rho\, d\rho d\varphi dh = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left[\int_\rho^{\sqrt{9-\rho^2}} \rho^3\, dh \right] d\rho \right\} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \rho^3 \left[h\right]_\rho^{\sqrt{9-\rho^2}}\, d\rho \right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \rho^3 (\sqrt{9-\rho^2} - \rho)\, d\rho \right\} d\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (\rho^3 \sqrt{9-\rho^2} - \rho^4)\, d\rho \right) = \frac{81}{10}\pi(8 - 5\sqrt{2})$$

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \rho^3 \sqrt{9-\rho^2}\, d\rho = \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & 9-\rho^2 \\ dt & = & -2\rho d\rho \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int_9^{\frac{9}{2}} \sqrt{t}(9-t)\, dt$$

$$= \left[\frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_{\frac{9}{2}}^9 = 3^4 - \frac{3^5}{5} - \frac{3^4}{2\sqrt{2}} + \frac{3^5}{20\sqrt{2}} = \frac{3^4}{40}(40 - 24 - 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2})$$